EGZAMIN MATURALNY 2015 MATEMATYKA

# Rozwiązujemy trudne zadania

**Maturzysto! Czas rozpocząć przygotowania do egzaminu. Dziś omawiamy najtrudniejsze zadania z tegorocznej matury na poziomie podstawowym.**

Egzamin maturalny z matematyki jest za łatwy - tak sądzi bardzo wiele osób. Okazuje się jednak, że w tym roku w pierwszym terminie matury z matematyki nie zdał co trzeci abiturient. To oznacza, że nie osiągnął wymaganego progu 30% możliwych do uzyskania punktów. Przyszłoroczni maturzyści już pewnie zastanawiają się, jak przygotować się do obowiązkowego dla wszystkich egzaminu, wiadomo bowiem, że matura z matematyki prostsza nie będzie.

Proponuję zacząć od nauki na cudzych błędach. Jakie zadania sprawiły zdającym w 2014 roku największe problemy i jak sobie z nimi radzić, postaram się przedstawić, analizując zadania z tego właśnie egzaminu. Wybrałem takie, które sprawiły więcej kłopotów. Jako kryterium wyboru przyjąłem warunek, że rozwiązało je mniej niż 60% zdających. Obok numeru zadania zamieściłem maksymalną liczbę punktów możliwą do otrzymania za w pełni poprawne rozwiązanie oraz poziom wykonalności w procentach.

## CZĘŚĆ 1 – ZADANIA ZAMKNIĘTE

### Zadanie 2. (1 pkt) – około 57%

Jeżeli liczba 78 jest o 50% większa od liczby $c$, to

**A.** $c = 60$ **B.** $c = 52$ **C.** $c = 48$ **D.** $c = 39$

Zadania maturalne mogą się odwoływać również do treści nauczania z wcześniejszych etapów edukacji. Obliczenia procentowe są jedną z elementarnych umiejętności, którą uczeń gimnazjum powinien opanować. Co zaskakujące, okazało się ono trudne niemal dla połowy zdających maturę.

**Rozwiązanie:** Bardzo wielu zdających nie potrafiło odróżnić sformułowania „Liczba 78 jest o 50% większa od liczby $c$" od zapisu „Liczba $c$ stanowi 50% liczby 78" i wskazywało odpowiedź D jako poprawną. Łatwo można znaleźć właściwą odpowiedź, rozumując następująco: Gdyby liczba 78 była równa liczbie $c$, to znaczy byłaby równa 100% $c$. Skoro jest o 50% większa od tej liczby, oznacza to, że jest równa 150% $c$. Teraz prosty rachunek pozwala obliczyć liczbę $c$.

$$150\%c = 78$$
$$1,5c = 78$$
$$c = 78:1,5$$
$$c = 52$$

### Zadanie 4. (1 pkt) – około 47%

Suma $\log_8 16 + 1$ jest równa

**A.** 3 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\log_8 17$ **D.** $\frac{7}{3}$

**Rozwiązanie:** Aby rozwiązać to zadanie, można zastosować definicję logarytmu. Jeżeli się jej nie pamięta, warto skorzystać z zestawu „*Wybranych wzorów matematycznych*" - pomocy, której każdy zdający w trakcie egzaminu może używać. Na drugiej stronie odnajdujemy zapis:

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c > 0$ przy podstawie $a$ nazywamy wykładnik $b$ potęgi, do której należy podnieść podstawę $a$, aby otrzymać liczbę $c$: $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$

W naszym zadaniu szukamy więc takiej liczby (oznaczmy ją $x$), do której należy podnieść liczbę 8, aby otrzymać liczbę 16.

Mamy więc równanie. Wygodnie odczytuje się rozwiązania tego typu równań, gdy wyrażenia po obu stronach równania mają te same podstawy.

Ponieważ $8 = 2^3$ oraz $16 = 2^4$, stąd stosując twierdzenie o potędze potęgi, otrzymujemy. Dalej już łatwo:

$$3x = 4$$
$$x = \frac{4}{3}$$

Teraz trzeba jeszcze pamiętać o dodaniu, zgodnie z treścią zadania, liczby 1:

$\frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$ i wskazujemy odpowiedź **D**.

### Zadanie 6. (1 pkt) – około 55%

Funkcja liniowa $f(x) = (m^2 - 4)x + 2$ jest malejąca, gdy

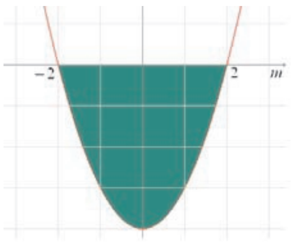
**A.** $m \in \{-2, 2\}$ **C.** $m \in (-\infty, -2)$

**B.** $m \in (-2, 2)$ **D.** $m \in (2, +\infty)$

**Rozwiązanie:** Kolejne zadanie, które okazało się trudne dla zdających, dotyczyło własności funkcji liniowej. Rozwiązanie tego zadania składa się z dwóch etapów. Pierwszy dotyczy wiadomości teoretycznych - znajomości roli współczynników we wzorze funkcji liniowej. Ogólnie można zapisać wzór każdej funkcji liniowej w postaci $f(x) = ax + b$. Współczynnik $a$, nazywany współczynnikiem kierunkowym, decyduje o nachyleniu prostej (wykresu funkcji) do osi $0x$, współczynnik $b$ ma związek z tym, w którym punkcie wykres funkcji liniowej przecina oś $0y$. Funkcja liniowa jest malejąca, gdy współczynnik kierunkowy jest ujemny. Z powyższego wynika więc, że w naszym zadaniu $a = m^2 - 4$, zatem $m^2 - 4 < 0$. Rozwiązanie otrzymanej nierówności kwadratowej to drugi etap poszukiwania rozwiązania. Wygodnie jest rozłożyć lewą stronę tej nierówności na czynniki, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia:

$$m^2 - 4 < 0$$
$$(m-2)(m+2) < 0$$

a następnie odczytać rozwiązanie nierówności, na przykład wykorzystując ilustrację graficzną.




$m \in (-2, 2)$ i zaznaczamy odpowiedź **B**.

### Zadanie 9. (1 pkt) – około 57%

Dla każdej liczby $x$, spełniającej warunek $-3 < x < 0$, wyrażenie $\frac{|x+3| - x + 3}{x}$ jest równe

**A.** 2 **B.** 3 **C.** $-\frac{6}{x}$ **D.** $\frac{6}{x}$

**Rozwiązanie:** Po raz kolejny kluczem do rozwiązania zadania jest znajomość definicji pojęć, które w nim występują. Przypomnijmy sobie definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$ (strona 1. „*Wybrane wzory matematyczne*").

W treści zadania występuje $|x+3|$. Aby można było zastosować powyższą definicję należy ustalić znak wyrażenia $x+3$. Ponieważ $-3 < x < 0$, wartość wyrażenia $x+3$ jest dodatnia dla każdego $x$ z tego przedziału. Mamy więc $|x+3| = x+3$. Teraz już tylko rachunki

$\frac{|x+3| - x + 3}{x} = \frac{x + 3 - x + 3}{x} = \frac{6}{x}$. Poprawna jest więc odpowiedź **D**.

### Zadanie 12. (1 pkt) – około 22%

Jeżeli trójkąty $ABC$ i $A'B'C'$ są podobne, a ich pola są, odpowiednio, równe 25 cm² i 50 cm², to skala podobieństwa $\frac{A'B'}{AB}$ jest równa

**A.** 2 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

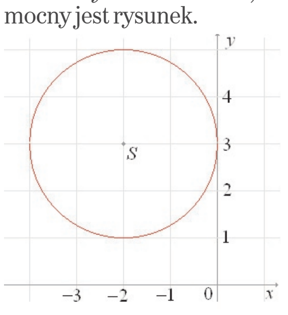
**Rozwiązanie:** Rozwiązując zadania dotyczące podobieństwa trójkątów, należy zawsze uważnie przeanalizować treść zadania, w szczególności pod kątem „co do czego jest podobne w danej skali". W powyższym zadaniu jest mowa o skali podobieństwa $k = \frac{A'B'}{AB}$, czyli trójkąta o większym polu do trójkąta o polu mniejszym. Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, stąd $k^2 = \frac{50}{25}$, zatem $k^2 = 2$, czyli $k = \sqrt{2}$. Zaznaczamy odpowiedź **C**.

### Zadanie 15. (1 pkt) – około 57%

Liczba punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ z osiami układu współrzędnych jest równa

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

**Rozwiązanie:** Maturzyści mają kłopot z przywołaniem, a przede wszystkim z interpretacją zapisu, odpowiedniego obiektu matematycznego. Jedną z metod rozwiązania tego zadania jest wykonanie odpowiedniej ilustracji graficznej. Pierwszym krokiem będzie odczytanie, z równania okręgu, współrzędnych środka i długości promienia (potrzebne informacje - „*Wybrane wzory matematyczne*" strona 6.). Otrzymujemy $S = (-2, 3)$, $r = 2$. Pomocny jest rysunek.




Wyraźnie widać, że dany okrąg jest styczny do osi $Oy$ (upewnia nas o tym to, że odległość środka od tej osi jest równa promieniowi), czyli ma z tą osią jeden punkt wspólny. Z osią $Ox$ okrąg nie ma punktów wspólnych (odległość środka od tej osi jest większa niż promień). Zaznaczona powinna zostać odpowiedź **B**.

### Zadanie 18. (1 pkt) – około 48%

O funkcji liniowej $f$ wiadomo, że $f(1) = 2$. Do wykresu tej funkcji należy punkt $P = (-2, 3)$. Wzór funkcji $f$ to:

**A.** $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ **C.** $f(x) = -3x + 7$

**B.** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ **D.** $f(x) = -2x + 4$

**Rozwiązanie:** Tylko mniej niż połowa zdających uporała się z tym zadaniem. Być może spowodowały to błędy rachunkowe, w przypadku często wybieranej metody algebraicznej. Standardowe rozwiązanie zadania wygląda bowiem następująco.

Z faktu, że $f(1) = 2$, wnioskujemy, że punkt $Q = (1, 2)$ należy do wykresu funkcji $f$. Niech funkcja $f$ ma wzór $f(x) = ax + b$. Ponieważ punkty $P$ i $Q$ należą do jej wykresu, to współrzędne tych punktów podstawione odpowiednio za $x$ i $y$ do wzoru funkcji dają równości prawdziwe. Otrzymujemy układ równań:

$\begin{cases} 3 = a \cdot (-2) + b \\ 2 = a \cdot 1 + b \end{cases}$ i po przekształceniu $\begin{cases} -2a + b = 3 \\ a + b = 2 \end{cases}$

Rozwiązujemy go np. metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} -2a + b = 3 \\ a + b = 2 \quad / \cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + b = 3 \\ -a - b = -2 \end{cases}$$

Stąd $-3a = 1$, zatem $a = -\frac{1}{3}$. W analogiczny sposób (mnożąc drugie równanie przez 2) obliczamy, że $b = \frac{7}{3}$. Należy zaznaczyć zatem odpowiedź **A**. Warto zwrócić uwagę na fakt, że wcale nie trzeba było obliczać $b$. Tylko jedna z zaproponowanych przez autora zadania odpowiedzi spełnia warunek, że $a = -\frac{1}{3}$. Analizując rozwiązanie tego zadania, warto zwrócić uwagę, że nie wszystkie zadania zamknięte trzeba rozwiązywać jak zadania otwarte i dopiero na koniec porównywać otrzymany wynik z odpowiedziami umieszczonymi pod treścią.

Można postąpić również tak: podstawiamy dane z zadania do proponowanych odpowiedzi i sprawdzamy, czy spełnione są warunki wynikające z treści tego zadania. W naszym przypadku po kolei możemy sprawdzać, która z funkcji ma taka własność, że $f(1) = 2$ oraz $f(-2) = 3$ (bo punkt $P$ należy do wykresu funkcji $f$). W przypadku tego zadania okazuje się, że już sprawdzenie funkcji z punktu **A** jest skuteczne.

$$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{7}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

oraz $f(-2) = -\frac{1}{3} \cdot (-2) + \frac{7}{3} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{9}{3} = 3$.

### Zadanie 22. (1 pkt) – około 24%

Do wykresu funkcji, określonej dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $y = -2^{x-2}$, należy punkt:

**A.** $A = (1, -2)$ **B.** $B = (2, -1)$ **C.** $C = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ **D.** $D = (4, 4)$

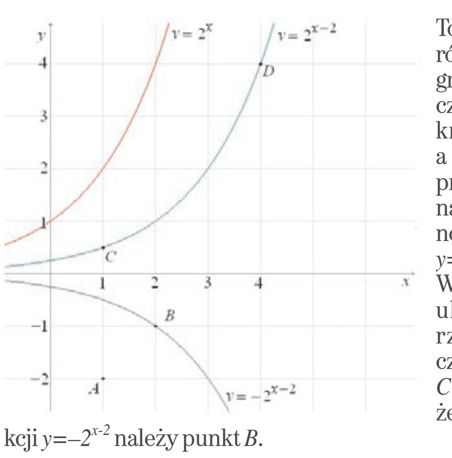
**Rozwiązanie:** Przedstawiona wyżej metoda sprawdzania warunków jest również wygodna do rozwiązania tego zadania. Obliczamy kolejno:

$$f(1) = -2^{1-2} = -2^{-1} = -\frac{1}{2^1} = -\frac{1}{2} \neq -2$$

$$f(2) = -2^{2-2} = -2^0 = -1$$

Poprawna jest zatem odpowiedź **B**.

Tak niski procent wykonania tego zadania - rozwiązał go zaledwie co czwarty maturzysta - wynika prawdopodobnie z częstego błędu popełnianego przez zdających. Błąd ten polega na nierozróżnianiu dwóch zapisów $-a^n$ oraz $(-a)^n$. W pierwszym przypadku do potęgi $n$ podnosimy liczbę $a$ i wynik zapisujemy ze znakiem minus (pamiętając, że gdyby efektem obliczenia $a^n$ była liczba ujemna, to ostateczni wynik będzie liczbą dodatnią), w drugim przypadku do potęgi $n$ podnosimy liczbę $-a$.




To zadanie można również rozwiązać graficznie. Wystarczy narysować wykres funkcji $y = 2^x$, a następnie przekształcając go, naszkicować kolejno wykresy funkcji $y = 2^{x-2}$ oraz $y = -2^{x-2}$. W tym samym układzie współrzędnych zaznaczamy punkty $A$, $B$, $C$ i $D$. Okazuje się, że do wykresu funkcji $y = -2^{x-2}$ należy punkt $B$.