Zadanie 23. (1 pkt) – około 48%

Jeżeli A jest zdarzeniem losowym, a A' - zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A oraz zachodzi równość $P(A)=2\cdot P(A')$, to:

A. $P(A)=\frac{2}{3}$ **B.** $P(A)=\frac{1}{2}$ **C.** $P(A)=\frac{1}{3}$ **D.** $P(A)=\frac{1}{6}$

Aby rozwiązać to zadanie, wystarczy się powołać na jedną z elementarnych własności prawdopodobieństwa („*Wybrane wzory matematyczne*”, str. 15):
$P(A')=1-P(A)$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A.

Podstawiamy do danej równości i otrzymujemy:
$P(A)=2\cdot P(A')$
$P(A)=2\cdot[1-P(A)]$

Przekształcamy i obliczamy $P(A)$:
$P(A)=2-2P(A)$
$3\cdot P(A)=2$
$P(A)=\frac{2}{3}$

Poprawna jest zatem odpowiedź **A**.

Zadanie 24. (1 pkt) – około 27%

Na ile sposobów można wybrać dwóch graczy spośród dziesięciu zawodników?

A. 100 **B.** 90 **C.** 45 **D.** 20

Rozwiązanie: Średnio trzech na czterech maturzystów „poległo” na tym zadaniu. Prawdopodobnie zdający stosują bezkrytycznie znane algorytmy, nie dostosowując ich do sytuacji opisanej w treści zadania.

Rozwiązując tego typu zadanie, czyli przystępując do poszukiwania sposobu zliczania obiektów, warto kilka takich obiektów zapisać, żeby uświadomić sobie ich strukturę. Ponumerujmy zawodników liczbami od 1 do 10. Jak można zapisać, który z nich zostali wybrani? Na przykład tak: {7,9}, co oznacza, że wybrani zostali zawodnicy o numerach 7 i 9, a zapis {1,10} oznacza, że wybrani zostali zawodnicy o numerach 1 i 10.

Teraz pojawia się kluczowe pytanie. Czy zapis {7,9} oznacza ten sam wybór co zapis {9,7}? Oczywiście - tak. Oba te zapisy oznaczają, że zostali wybrani zawodnicy 7 i 9. Kolejność nie ma tu żadnego znaczenia. Obliczmy więc, na ile sposobów można wybrać dwóch graczy. Skoro jest ich dziesięciu, to pierwszego można wybrać na dziesięć sposobów, a drugiego na 9 (nie można wybrać dwa razy tego samego gracza). Reguła mnożenia podpowiada, że takich wyborów jest $10\cdot 9$, czyli 90. W ten sposób obliczyliśmy liczbę wszystkich możliwych par wylosowanych graczy. Ten rachunek nie uwzględnia jednak wcześniejszego spostrzeżenia, że np. para (7,9) i para (9,7) oznaczają wybór tych samych dwóch graczy. Trzeba więc otrzymaną liczbę wszystkich par podzielić przez 2. Ostatecznie liczba wszystkich możliwych wyborów jest równa $90:2=45$.

Zadanie 25. (1 pkt) – około 57%

Mediana zestawu danych 2, 12, a, 10, 5, 3 jest równa 7. Wówczas:

A. $a=4$ **B.** $a=6$ **C.** $a=7$ **D.** $a=9$

Rozwiązanie: Ostatnie z zadań zamkniętych arkusza maturalnego odwołuje się również do wiadomości z gimnazjum. Przypomnijmy sobie definicję pojęcia mediany („*Wybrane wzory matematyczne*”, str. 16).

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1\le a_2\le a_3\le\ldots\le a_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)
- dla n parzystych: $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu).

Ponieważ liczba danych jest parzysta (równa 6), stosować będziemy drugą część definicji mediany.

Ważna sprawa! Trzeba dane uporządkować w kolejności niemalejącej.

Mamy więc 2, 3, 5, 10, 12. Gdzie jednak umieścić liczbę a? Liczba a nie może być większa ani równa 10, bo wtedy mediana byłaby za duża (już $\frac{5+10}{2}=7,5$), nie może też być mniejsza ani równa 5, bo wtedy byłaby za mała (nawet $\frac{5+5}{2}=5$). Wynika stąd, że $5<a<10$. Zatem nasze dane, uporządkowane niemalejąco, wyglądają tak: 2, 3, 5, a, 10, 12.

Teraz stosujemy definicję mediany i mamy:
$\frac{5+a}{2}=7$, stąd $5+a=14$, czyli $a=9$. Właściwa jest zatem odpowiedź **D**.

CZĘŚĆ 2. – ZADANIA OTWARTE

Zadanie 26. (2 pkt) – około 53%

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=2x^2+bx+c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W=(4,0)$. Oblicz wartości współczynników b i c.

Rozwiązanie: Rozwiązywanie problemów związanych z własnościami funkcji kwadratowej, a w szczególności jej wykresem, to jedno z podstawowych zagadnień, które absolwent szkoły ponadgimnazjalnej powinien z niej wynieść. Niestety okazuje się, że średnio co drugi zdający uporał się z powyższym zadaniem. Jaki jest tego powód? Przeglądając wiele rozwiązań, można odnieść wrażenie, że maturzyści mało wnikliwie analizują treść zadań i nie widząc rozwiązania od razu, zbyt szybko rezygnują. W przypadku tego zadania wydawać by się mogło, że jest zbyt mało danych do jego rozwiązania. Należy obliczyć wartości dwóch współczynników we wzorze funkcji kwadratowej, a pozornie dysponujemy tylko jedną informacją - do wykresu tej funkcji należy punkt $W=(4,0)$. Nie jest to jednak byle jaki punkt. To wierzchołek paraboli. Współrzędne wierzchołka paraboli są związane z współczynnikami we wzorze funkcji wzorami („*Wybrane wzory matematyczne*”, str. 4):

$W=(p,q)$, gdzie $p=-\frac{b}{2a}$ oraz $q=-\frac{\Delta}{4a}$.

W powyższym zadaniu mamy $p=4$, $q=0$, $a=2$, stąd:
$4=-\frac{b}{2\cdot 2}$
$b=-16$

Funkcja f ma więc wzór $f(x)=2x^2-16x+c$. Teraz można skorzystać z faktu, że do wykresu tej funkcji należy punkt W, zatem jego współrzędne podstawione do wzoru tej funkcji dają równość prawdziwą. Mamy więc:
$0=2\cdot 4^2-16\cdot 4+c$, stąd:
$c=32$.

To zadanie można rozwiązać na wiele różnych sposobów. Niektóre można znaleźć na www.cke.edu.pl.

Zadanie 28. (2 pkt) – około 8%

Udowodnij, że każda liczba całkowita k, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

Rozwiązanie: Średnio ośmiu na stu maturzystów rozwiązało to zadanie. Być może polecenie „uzasadnij”, „udowodnij”, „wykaż” albo podobne powoduje, że zdający rezygnują już na poziomie czytania treści. A zadania na dowodzenie w arkuszu egzaminacyjnym na poziomie podstawowym wcale nie są trudne. Wymagają tylko nieco doświadczenia i samodzielnego myślenia, a umiejętność dzielenia z resztą powinno się nabyć już w szkole podstawowej. Co to znaczy, że jakaś liczba dzieli się z resztą przez inną liczbę? Zobaczmy na przykładzie:

Liczba 33 dzieli się przez 5 z resztą 3. Oznacza to, że liczbę 33 można przedstawić w postaci iloczynu liczby 5 i pewnej liczby naturalnej (w tym konkretnym przypadku liczby 6), powiększając ten iloczyn o 3.

$33=5\cdot 6+3$

Liczba k przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2. Rozumując analogicznie, mamy:
$k=7\cdot n+2$, gdzie n jest liczba naturalną. Zapiszmy zatem liczbę $3k^2$.

$$3k^2=3\cdot(7n+2)^2=3\cdot\left(49n^2+28n+4\right)=147n^2+84+12$$

Gdyby udało się zapisać liczbę $147n^2+84+12$ w postaci iloczynu liczby 7 i pewnej liczby naturalnej powiększonego o 5, dowód zostałby zakończony.

Zatem:

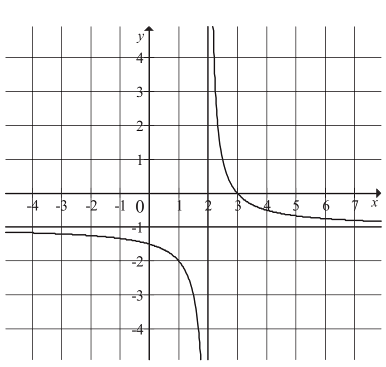
$$147n^2+84+12=147n^2+84+7+5=7\cdot\left(21n^2+12n+1\right)+5$$

Ponieważ liczba n była naturalna, to całe wyrażenie $21n^2+12n+1$ też jest naturalne.

Z tego wynika, że każda liczba całkowita k, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

Zadanie 29. (2 pkt) – około 27%

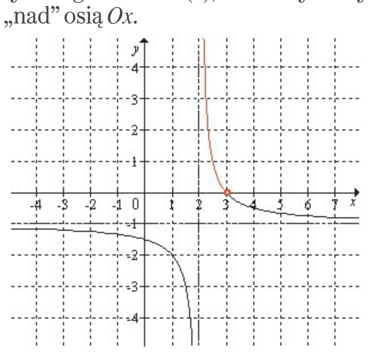
Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f, który powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji określonej wzorem $y=\frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 0$.



a) Odczytaj z wykresu i zapisz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od 0.

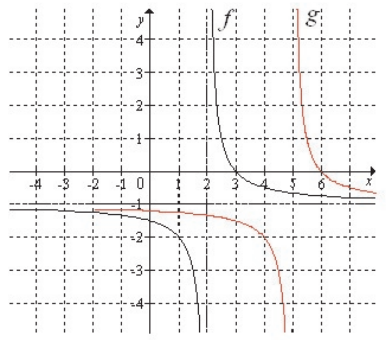
b) Podaj miejsce zerowe funkcji g określonej wzorem $g(x)=f(x-3)$.

Rozwiązanie:
Najpierw podpunkt a). Wartości funkcji są większe od zera dla tych argumentów (x), dla których wykres funkcji znajduje się „nad” osią Ox.



Szukany zbiór argumentów to przedział (2, 3) co można odczytać z powyższego wykresu.

Teraz pora na podpunkt b).



Aby podać miejsce zerowe funkcji g, wygodnie najpierw naszkicować jej wykres, a następnie z tego wykresu odczytać miejsce zerowe. Wykres funkcji g powstaje z przesunięcia wykresu funkcji f o wektor [3,0].

Miejscem zerowym funkcji g jest 6.

Zadanie 30. (2 pkt) – około 54%

Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

Rozwiązanie: Podobnie jak w przypadku zadania 24. Proponuję w celu „oswojenia” problemu wypisać kilka wyników losowania, o którym mowa w zadaniu. Jeżeli za pierwszym razem wylosowaliśmy np. liczbę 5, a za drugim 3, to wynikiem takiego losowania będzie para (5, 3). Inne możliwe wyniki to np. (1, 7) - za pierwszym razem wylosowaliśmy liczbę 1, a za drugim 7, (3, 3) - zarówno za pierwszym, jak i za drugim razem wylosowaliśmy liczbę 3 itd. Łatwo zauważyć, że po pierwsze, pary np. (2, 4) i (4, 2) są różne (ważne jest, która liczba została wylosowana jako pierwsza, a która jako kolejna), po drugie, wynikami mogą być również takie pary, w których liczby się powtarzają (losowanie jest ze zwracaniem). Zatem zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a, b) liczb z podanego zbioru. Te zdarzenia są jednakowo prawdopodobne, jest więc to model klasyczny.

Możemy oczywiście wszystkie wyniki tego losowania wypisać i następnie je zliczyć. Wygodniej jest jednak przeprowadzić następujące rozumowanie: na pierwszym miejscu w parze może być każda spośród ośmiu liczb, można ją więc wybrać na osiem sposobów, na drugim miejscu w parze również może być jedna z ośmiu liczb. Reguła mnożenia pozwala więc obliczyć liczbę wszystkich par (zdarzeń elementarnych): $|\Omega|=8\cdot 8=64$.

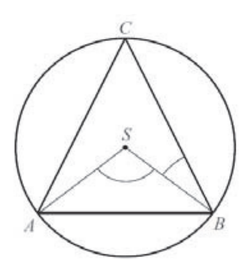
Kolejnym etapem może być wypisanie zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu dwóch liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6, i podanie liczby tych zdarzeń:
$A=\{(5,1), (6,2), (7,1), (7,3), (8,2), (8,4)\}$
Zatem: $|A|=6$

Obliczamy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia:
A: $P(A)=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$.

Najczęstsze błędy zdających to pominięcie w zliczaniu wszystkich zdarzeń elementarnych tych, w których wyniki pierwszego i drugiego losowania są takie same, oraz w zliczaniu zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A, zaniedbanie kolejności (uznanie, że zdarzeniu A sprzyjają również wyniki np. (1,5), (3,7)).

Rozwiązanie zadań polegających na dwukrotnym losowaniu liczby z danego zbioru wygodnie ilustruje się za pomocą tabeli. Do szczegółowego opisu tego sposobu rozwiązania odsyłam Czytelnika na stronę internetową Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

Zadanie 31. (2 pkt) – około 23%



Środek S okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC o ramionach AC i BC leży wewnątrz tego trójkąta (zobacz rysunek).

Wykaż, że miara kąta wypukłego ASB jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego SBC.

Rozwiązanie: Kolejne zadanie wymagające przedstawienia wnioskowania i argumentacji również okazało się trudne dla zdających. Ponieważ kąt wpisany ACB oraz kąt środkowy ASB leżą po tej samej stronie cięciwy AB, na podstawie twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że $|\angle ACB|=\frac{1}{2}\cdot|\angle ASB|$. Trójkąt ABC jest równoramienny, o ramionach AC i BC, więc prosta CS zawiera dwusieczną kąta ACB. Wynika stąd, że $|\angle SCB|=\frac{1}{2}\cdot|\angle ACB|$, zatem $|\angle SCB|=\frac{1}{4}\cdot|\angle ASB|$. Trójkąt SCB jest również równoramienny, ponieważ jego boki SC i SB są promieniami tego samego okręgu. Kąty przy podstawie CB trójkąta SCB są więc równe, czyli $|\angle SCB|=|\angle SBC|$. Stąd bezpośrednio wynika wniosek $|\angle SBC|=\frac{1}{4}\cdot|\angle ASB|$ co należało wykazać.

Zadanie 32. (4 pkt) – około 44%

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198. Stosunki długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka to 1 : 2 : 3. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

Rozwiązanie: W pierwszym kroku rozwiązania zadania ze stereometrii wygodnie jest narysować rzut bryły, której zadanie do-